

HYPERBOLICKÝ PARABOLOID VE STAVEBNĚ TECHNICKÉ PRAXI Z POHLEDU GEOMETRIE

Jaroslav Krieg, Milan Vacka

Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích

Abstrakt:

Rozdělení přímkových ploch užívaných ve stavební praxi a popis vytváření hyperbolického paraboloidu, který je často užíván při zastřešování nebytových objektů pro svůj výjimečný vzhled, jednoduchou konstrukci a statickou pevnost. Analytický výpočet vrcholu hyperbolického paraboloidu jako nejvýznačnějšího bodu této plochy.

Klíčová slova: hyperbolický paraboloid, přímková plocha rozvinutelná, přímková plocha nerozvinutelná, torzální přímka, 1. a 2. regulus, tečná rovina plochy, osa, vrchol, parametrické vyjádření přímky, průsečík přímek

Ve stavební praxi se poměrně často setkáváme s tzv. přímkovými plochami, tedy plochami, kde každým bodem na povrchu prochází přímka, která celá leží na této ploše. Přímkové plochy dělíme na rozvinutelné a nerozvinutelné, neboli zborcené. Příkladem rozvinutelných ploch je rovina, válcová plocha nebo kuželová plocha, zborcených ploch hyperbolický paraboloid, různé typy konoidů, jednodílný hyperboloid, šroubová plocha.

Obr. 1: Kostel Sv. Athanasia v Readingu, Massachusetts, USA



Zdroj: Jiří Doležal

Hyperbolický paraboloid patří mezi, ve stavebnictví často užívané, zborcené plochy přímkové. Důvodem je efektnost těchto ploch, jejich poměrně snadná konstrukce, ale i statické hledisko, z jehož pohledu se jedná o plochu samonosnou. Pokud přímková plocha obsahuje tzv. torzální přímku, tj. přímku plochy, v jejíchž jednotlivých bodech jsou tečné

roviny plochy totožné, musí být v jejím okolí plocha zesílena. Výhodou hyperbolického paraboloidu je, že žádnou torzální přímku neobsahuje.

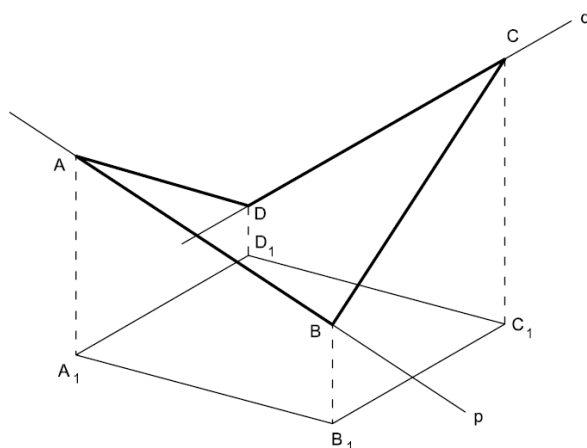
Obr. 2: Hokejová hala v Calgary, Kanada



Zdroj: Jiří Doležal

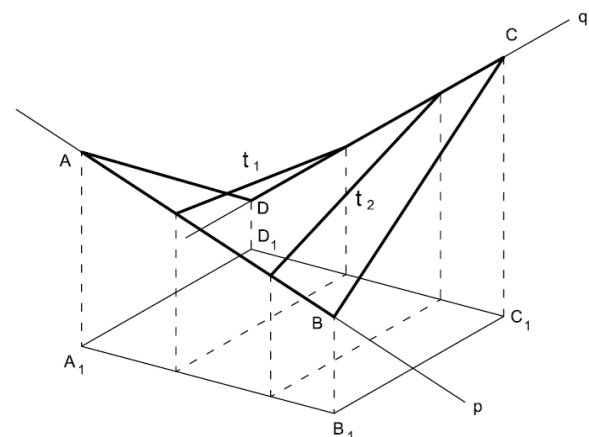
Vznik hyperbolického paraboloidu si lze představit jako systém příček dvou mimoběžek p a q rovnoběžných s danou rovinou ρ . Hyperbolický paraboloid se obvykle zadává pomocí tzv. zborceného čtyřúhelníku $ABCD$, jehož půdorysem je rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, dále $p = AB$, $q = CD$ a $\rho = A_1D_1DA$. Ve druhém obrázku jsou zakresleny dvě tvořící přímky t_1 a t_2 plochy, mezi které patří samozřejmě i přímky AD a BC . Všechny takto vzniklé tvořící přímky jsou přímkami jednoho *regulu*.

Obr. 3



Zdroj: vlastní

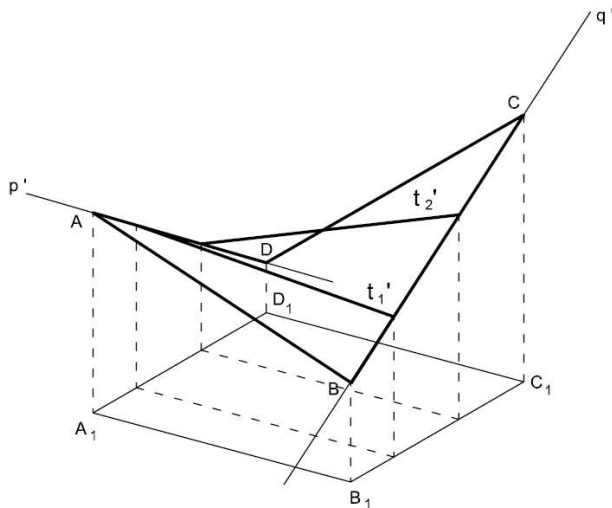
Obr. 4



Zdroj: vlastní

Na ploše existuje i druhý systém přímek, druhý *regulus*, jehož vznik je zakreslen v následujícím obrázku, kde mimoběžkami jsou $p' = AD$, $q' = BC$ a $\rho' = A_1B_1BA$. Všechny přímky jednoho regulu jsou různoběžné se všemi přímkami druhého regulu.

Obr. 5



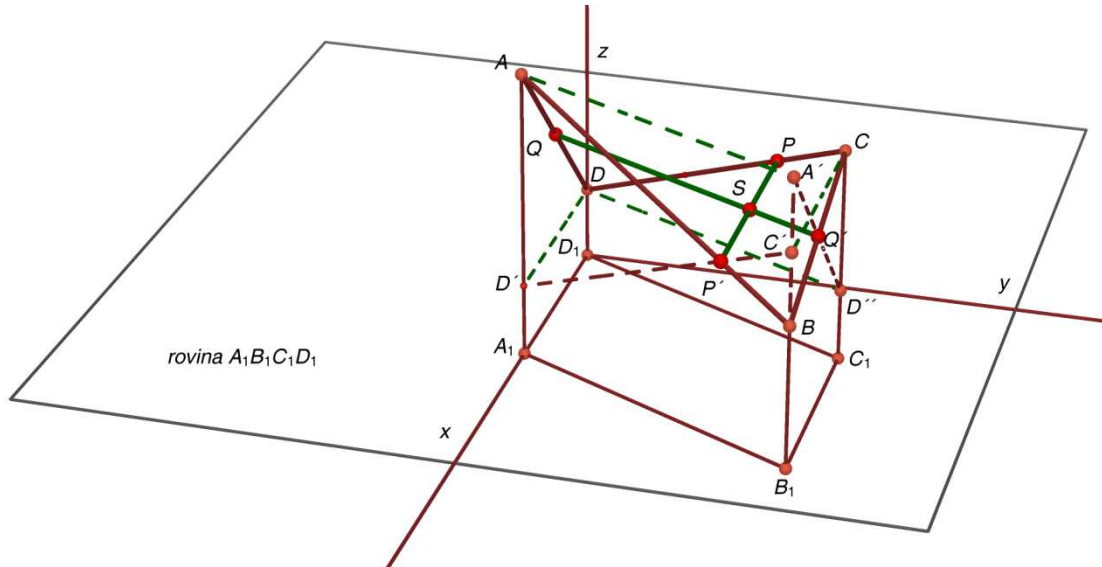
Zdroj: vlastní

Hyperbolický paraboloid má osu, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin ρ a ρ' , v našem případě je tedy kolmá k půdorysu $A_1B_1C_1D_1$ čtyřúhelníku $ABCD$ a prochází tzv. vrcholem plochy. Vrchol plochy je bod na této ploše, ve kterém tečná rovina plochy je kolmá k ose plochy. Tečná rovina plochy je určena dvěma různoběžnými přímkami procházející tímto vrcholem, z nichž každá je z jiného regulu. V uváděném příkladu je tedy rovnoběžná s $A_1B_1C_1D_1$. Vrchol plochy je velice významným bodem projektované stavby a bývá obvykle středem objektu, v některých případech leží na jeho obvodu.

Analytický výpočet vrcholu hyperbolického paraboloidu zadaného souřadnicemi čtyřúhelníku $ABCD$

Bez újmy na obecnosti volíme pravouhlou soustavu souřadnic a označení bodů v prostoru ve shodě s následujícím obrázkem:

Obr. 6



Zdroj: vlastní

Pro souřadnice bodů $A_1B_1C_1D_1$ lze obecně psát

$$A_1 = [x_A; 0; 0], B_1 = [x_B; y_B; 0], C_1 = [x_C; y_C; 0], D_1 = [0; 0; 0].$$

Protože $A_1B_1C_1D_1$ je rovnoběžník, můžeme

psát $A_1 = [x_A; 0; 0], B_1 = [x_B; y_B; 0], C_1 = [x_B - x_A; y_B; 0], D_1 = [0; 0; 0]$, a

tedy $A = [x_A; 0; z_A], B = [x_B; y_B; z_B], C = [x_B - x_A; y_B; z_C], D = [0; 0; z_D]$.

Podmínka: body $ABCD$ nesmí být komplanární. V opačném případě by tímto postupem nevznikl hyperbolický paraboloid.

Z této podmínky pro body A, B, C, D získáme její vyjádření pomocí souřadnic těchto bodů, jak plyne z dále uvedeného postupu

$$A - D = (x_A; 0; z_A - z_D), B - D = (x_B; y_B; z_B - z_D), C - D = (x_B - x_A; y_B; z_C - z_D),$$

$$0 \neq \begin{vmatrix} x_A & 0 & z_A - z_D \\ x_B & y_B & z_B - z_D \\ x_B - x_A & y_B & z_C - z_D \end{vmatrix} = \dots = x_A y_B (z_A - z_B + z_C - z_D) \Leftrightarrow x_A \neq 0 \wedge y_B \neq 0 \wedge z_A - z_B + z_C - z_D \neq 0.$$

Podmínka, že body A, B, C, D nejsou komplanární je reprezentována následujícími nerovnostmi

$$\boxed{x_A \neq 0 \wedge y_B \neq 0 \wedge z_A - z_B + z_C - z_D \neq 0}$$

Dále určíme souřadnice bodu $P' = AB \cap C'D'$, kde $C' = [x_B; y_B; z_C], D' = [x_A; 0; z_D]$.

Přímka určená body AB má parametrické vyjádření

$$x = x_A + (x_B - x_A)t; \quad y = y_B t; \quad z = z_A + (z_B - z_A)t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přímka určená body $C'D'$ má parametrický tvar

$$x = x_B + (x_A - x_B)s; \quad y = y_B - y_B s; \quad z = z_C + (z_D - z_C)s; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pro určení souřadnic hledaného bodu P' řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_A + (x_B - x_A)t &= x_B + (x_A - x_B)s \\ y_B t &= y_B - y_B s \\ z_A + (z_B - z_A)t &= z_C + (z_D - z_C)s \end{aligned}$$

Podle výše uvedené podmínky je $y_B \neq 0 \wedge z_A - z_B + z_C - z_D \neq 0$, a proto platí

$$t = 1 - s; \quad s = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B + z_C - z_D}.$$

$$P' = [p'_1; p'_2; p'_3] = \left[\frac{x_A(z_C - z_B) + x_B(z_A - z_D)}{z_A - z_B + z_C - z_D}; \frac{y_B(z_A - z_D)}{z_A - z_B + z_C - z_D}; \frac{z_A z_C - z_B z_D}{z_A - z_B + z_C - z_D} \right]$$

Přímka $P'P$ má parametrické vyjádření $x = p'_1 - x_A r; \quad y = p'_2; \quad z = p'_3; \quad r \in \mathbb{R}$.

Analogicky postupujeme při určení bodu Q' a přímky $Q'Q$:

$$Q' = [q'_1; q'_2; q'_3] = \left[\frac{(x_B - x_A)(z_A - z_B) + x_B(z_C - z_D)}{z_A - z_B + z_C - z_D}; y_B; \frac{z_A z_C - z_B z_D}{z_A - z_B + z_C - z_D} \right]$$

Přímka $Q'Q$ má parametrickou rovnici $x = q'_1 + (x_A - x_B)q; \quad y = q'_2 - y_B q; \quad z = q'_3; \quad q \in \mathbb{R}$.

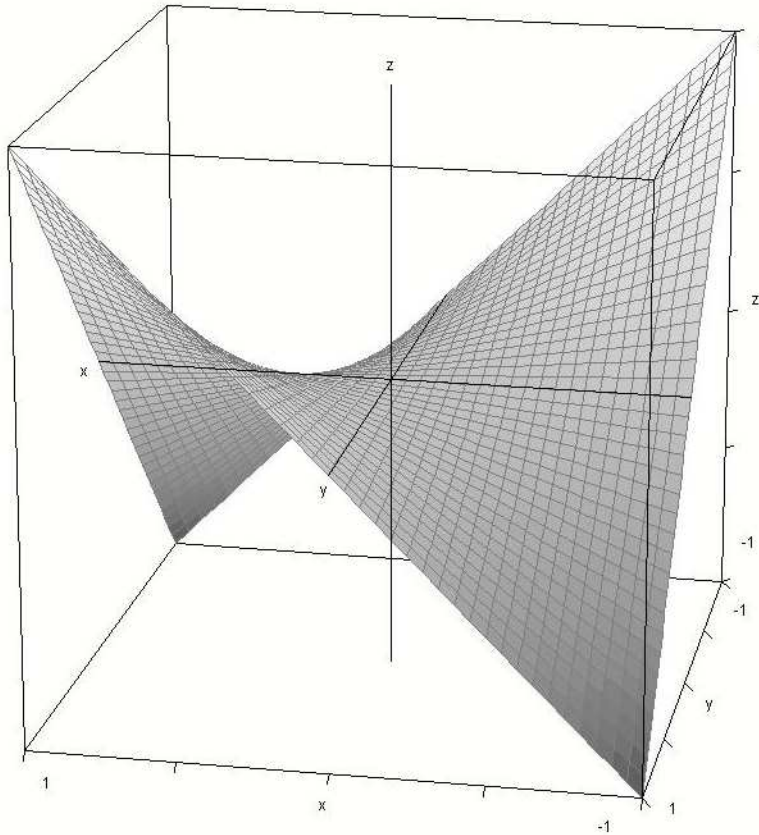
Pro hledané souřadnice vrcholu $S = P'P \cap Q'Q$ řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p'_1 - x_A r &= q'_1 + (x_A - x_B)q \\ p'_2 &= q'_2 - y_B q \\ p'_3 &= q'_3 \end{aligned}$$

a po úpravách obdržíme výsledný tvar souřadnic vrcholu S hyperbolického paraboloidu

$$S = \left[\frac{x_A(z_C - z_A) + x_B(z_A - z_D)}{z_A - z_B + z_C - z_D}; \frac{y_B(z_A - z_D)}{z_A - z_B + z_C - z_D}; \frac{z_A z_C - z_B z_D}{z_A - z_B + z_C - z_D} \right]$$

Obr. 7: Hyperbolický paraboloid s vrcholem v počátku $S = [0;0;0]$ kartézského souřadnicového systému s osami x, y, z .



Zdroj: vlastní

HYPERBOLIC PARABOLOID BUILDING AND TECHNICAL PRACTICE IN THE LIGHT OF GEOMETRY

Abstract:

Division of straight-line area used in construction practice and a description of the creation of the hyperbolic paraboloid, which is often used as roofing of non-residential buildings for its exceptional design, simple construction and static strength. Analytical calculation of the hyperbolic paraboloid as the top point of the most distinguished area.

Key words: hyperbolic paraboloid, developable straight-line areas, non-developable straight-line areas, torso line, the first and the second regulus, tangent plane area, axis, vertex, parametric equation of a line, intersection of lines

Kontaktní adresa:

RNDr. Jaroslav Krieg, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, e-mail: krieg@mail.vstecb.cz

RNDr. Milan Vačka, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, e-mail: vačka@mail.vstecb.cz